●课题

§5.9.1　正弦定理、余弦定理(一)

●教学目标

(一)知识目标

正弦定理.

(二)能力目标

1.了解向量知识应用；

2.掌握正弦定理推导过程；

3.会利用正弦定理证明简单三角形问题；

4.会利用正弦定理求解简单斜三角形边角问题；

5.能利用计算器进行运算.

(三)德育目标

通过三角函数、正弦定理、向量数量积等多处知识间联系来体现事物之间的普遍联系与辩证统一.

●教学重点

正弦定理证明及应用.

●教学难点

1.向量知识在证明正弦定理时的应用，与向量知识的联系过程；

2.正弦定理在解三角形时应用思路.

●教学方法

启发引导式

1.引导学生在证明正弦定理时与向量数量积的知识产生联系，主要在于如何与角产生联系，并注意利用三角函数的诱导公式对同角正余弦进行转化，在应用向量知识的同时，体现三角函数、正弦定理、向量数量积等多处知识之间的联系.

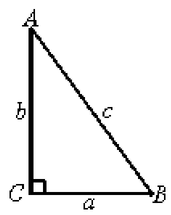
2.启发学生注意正弦定理的变形式，并总结正弦定理的适用题型的特点，在恰当时机正确选用正弦定理达到求解、求证目的.

●教具准备

投影仪、幻灯片三张

第一张：直角三角形边角关系(记作§5.9.1 A)

在 Rt△ABC 中，已知 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则有



$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\sin B=\dfrac{b}{c}$，$\sin C=1$，

即 $c=\dfrac{a}{\sin A}$，$c=\dfrac{b}{\sin B}$，$c=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

第二张：正弦定理(记作§5.9.1 B)

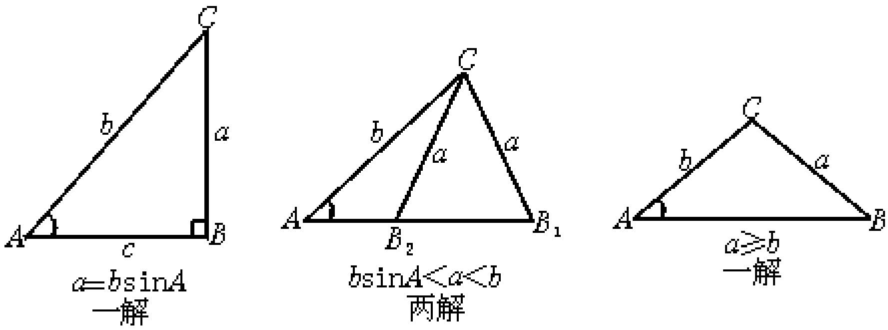
形式 1：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

形式 2：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$.

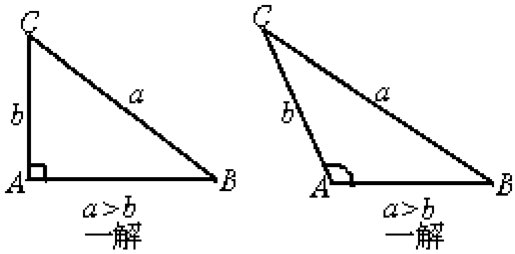
形式 3：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

第三张：在△*ABC* 中，已知 *a*、*b* 和 *A* 时解三角形的各种情况(记作§5.9.1 C)

(1)*A* 为锐角



(2)*A* 为直角或钝角



●教学过程

Ⅰ.课题导入

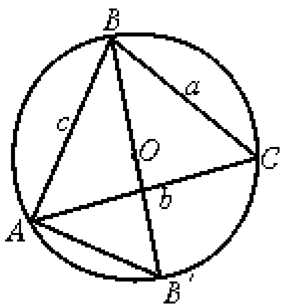
［师］在初中，我们已经会解直角三角形.就是说，已会根据直角三角形中已知的边与角求出未知的边与角，而在直角三角形中，有如下的边角关系.(打出幻灯片§5.9.1 A)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

那么，在任意三角形中，这一关系式是否成立呢?这也是我们这一节课将要研究的问题.

Ⅱ.讲授新课

［师］对于 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 这一关系的证明，我们一起来看下面的证法.



如图，在△*ABC* 中，已知 *BC*＝*a*，*AC*＝*b*，*AB*＝*c*，作△*ABC* 的外接圆，*O* 为圆心，连接 *BO* 并延长交圆于 *B*′，设 *BB*′＝2*R*.则根据直径所对的圆周角是直角以及同弧所对的圆周角相等可以得到：

$\angle BAB'=90^\circ$，$\angle C=\angle B'$

$\therefore \sin C=\sin B'=\dfrac{c}{2R}$

$\therefore \dfrac{c}{\sin C}=2R$

同理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$，$\dfrac{b}{\sin B}=2R$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

这就是说，对于任意的三角形，上述关系式均成立.因此，我们得到下面的定理.

正弦定理　在一个三角形中，各边和它所对的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

说明：上述证法采用了初中所学的平面几何知识，将任意三角形通过外接圆性质转化为直角三角形进而求证，此证法在巩固平面几何知识的同时，易于被学生理解和接受，并且消除了学生所持的“向量方法证明正弦定理是唯一途径”这一误解.既拓宽了学生的解题思路，又为下一步用向量方法证明正弦定理作了铺垫.

［师］接下来，我们可以考虑用前面所学的向量知识来证明正弦定理.从定理内容可以看出，定理反映的是三角形的边角关系，而在向量知识中，哪一处知识点体现边角关系呢?

［生］向量的数量积的定义式：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 θ 为两向量的夹角.

［师］回答得很好，但是向量数量积涉及的是余弦关系而非正弦关系，这两者之间能否转化呢?

［生］可以通过三角函数的诱导公式

$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$进行转化.

［师］这一转化产生了新角 $90^\circ-\theta$，这就为辅助向量 $\boldsymbol{j}$ 的添加提供了线索，为方便进一步的运算，辅助向量选取了单位向量 $\boldsymbol{j}$，而 $\boldsymbol{j}$ 垂直于三角形一边，且与一边夹角出现了 $90^\circ-\theta$ 这一形式，这是作辅助向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于三角形一边的原因.

［师］在向量方法证明过程中，构造向量是基础，并由向量的加法原则可得

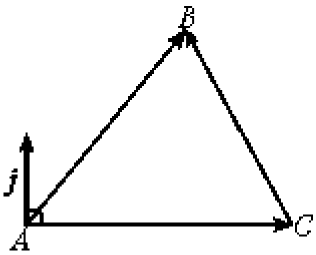
$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$$

而添加垂直于 $\overrightarrow{AC}$ 的单位向量 $\boldsymbol{j}$ 是关键，为了产生 $\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$ 的数量积，而在上面向量等式的两边同取与向量 $\boldsymbol{j}$ 的数量积运算，也就在情理之中了.

［师］下面，大家再结合课本进一步体会向量法证明正弦定理的过程，并注意总结在证明过程中所用到的向量知识点.

说明：(1)在给予学生适当自学时间后，应强调学生注意两向量的夹角是以同起点为前提，以及两向量垂直的充要条件的运用.

(2)要求学生在巩固向量知识的同时，进一步体会向量知识的工具性作用.



向量法证明过程：

(1)△*ABC* 为锐角三角形，过点 *A* 作单位向量 ***j*** 垂直于 $\overrightarrow{AC}$，则 ***j*** 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 90°－*A*，***j*** 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 90°－C.

由向量的加法原则可得

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

为了与图中有关角的三角函数建立联系，我们在上面向量等式的两边同取与向量 ***j*** 的数量积运算，得到

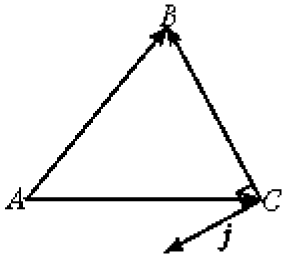
$\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$

由分配律可得

$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\therefore |\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AC}|\cos 90°+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos(90°-C)=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos(90°-A)$

$\therefore a\sin C=c\sin A$

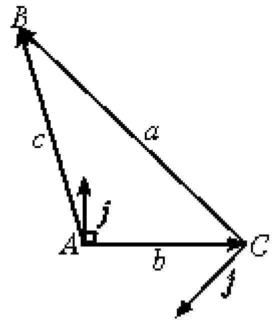


$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

另外，过点 *C* 作与 $\overrightarrow{CB}$ 垂直的单位向量 ***j***，则 ***j*** 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°＋*C*，***j*** 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 90°＋*B*，可得 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$.

(此处应强调学生注意两向量夹角是以同起点为前提，防止误解为 ***j*** 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°－*C*，***j*** 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 90°－*B*)

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.



(2)△*ABC* 为钝角三角形，不妨设 *A*＞90° 过点 *A* 作与 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量 ***j***，则 ***j*** 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 *A*－90°，***j*** 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 90°－C.

由 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ 得

$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$

即 $a\cdot\cos(90°-C)=c\cdot\cos(A-90°)$

$\therefore a\sin C=c\sin A$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

另外，过点 *C* 作与 $\overrightarrow{CB}$ 垂直的单位向量 ***j***，则 ***j*** 与 $\overrightarrow{AC}$ 夹角为 90°＋*C*，***j*** 与 $\overrightarrow{AB}$ 夹角为 90°＋*B*，同理可得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

综上所述，正弦定理对于锐角三角形、直角三角形、钝角三角形均成立.

［师］在证明了正弦定理之后，我们来进一步学习正弦定理的应用.(给出幻灯片§5.9.1 B)我们通过幻灯片中正弦定理的形式 2 不难得到，利用正弦定理，可以解决以下两类有关三角形问题.

(1)已知两角和任一边，求其他两边和一角.

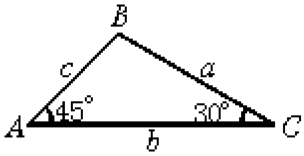
这类问题由于两角已知，故第三角确定，三角形唯一，解唯一，相对容易，课本 P_{128} 的例 1 就属于此类问题.

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角.

此类问题变化较多，我们来看屏幕(给出幻灯片§5.9.1 C)，图中列出了在△*ABC* 中，已知 *a*、*b* 和 *A* 时解三角形的各种情况，接下来，我们通过例题评析来进一步体会与总结.

例题评析：

［例 1］在△*ABC* 中，已知 *c*＝10，*A*＝45°，*C*＝30°，求 *b*(保留两个有效数字).



分析：如图，此题属于已知两角和其中一角求对边的问题，直接应用正弦定理可求出边 a，若求边 b，则需通过三角形内角和为 180°，求出角 B，再利用正弦定理求出边 b.

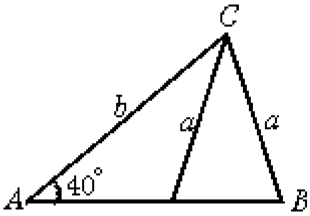
解：∵B＝180°－(A＋C)＝180°－(45°＋30°)＝105°，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

∴$b=\dfrac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\times\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}\approx 19$

评述：(1)此类问题结果为唯一解，学生较易掌握，如果已知两角和两角所夹的边，也是先利用内角和 180°求出第三角，再利用正弦定理.

(2)对于解三角形中的复杂运算可使用计算器，但应注意如下约定：当计算器所示结果为准确数时，或者为不少于四个有效数字的近似数而需要保留四个有效数字时，一律使用等号；保留的有效数字不少于四个时，使用约等号.

［例 2］在△ABC 中，已知 a＝20，b＝28，A＝40°，求 B(精确到 1°)和 c(保留两个有效数字).



分析：结合幻灯片§5.9.1 C，此例题属于 $b\sin A<a<b$ 的情形，故有两解.这样在求解之后呢，可以无需作进一步的检验，使学生在运用正弦定理求边、角时，感到目的很明确，同时体会分析问题的重要性.

解：∵$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 40^\circ}{20}=0.8999$，

∴B_1＝64°，B_2＝116°

当 B_1＝64°时，C_1＝180°－(B_1＋A)

＝180°－(64°＋40°)＝76°，

∴$c_1=\dfrac{a\sin C_1}{\sin A}=\dfrac{20\sin 76^\circ}{\sin 40^\circ}\approx 30$.

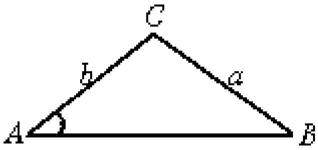
当 B_2＝116°时，C_2＝180°－(B_2＋A)

＝180°－(116°＋40°)＝24°，

∴$c_2=\dfrac{a\sin C_2}{\sin A}=\dfrac{20\sin 24^\circ}{\sin 40^\circ}\approx 13$.

评述：通过此例题可使学生明确，利用正弦定理所求角有两种可能，但是都不符合题意，可以通过分析获得，这就要求学生熟悉已知两边和其中一边的对角时解三角形的各种情形.当然对于不符题意的解的取舍，也可通过三角形的有关性质来判断，对于这一点，我们通过下面的例题来体会.

［例 3］在△ABC 中，已知 a＝60，b＝50，A＝38°，求 B(精确到 1°)和 c(保留两个有效数字).



分析：结合幻灯片§5.9.1 C，此例题属于 $a\geqslant b$ 这一类情形，有一解，也可根据三角形内大角对大边，小角对小边这一性质来排除 B 为钝角的情形.

解：已知 $b<a$，所以 $B<A$，因此 B 也是锐角.

$\because \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{50\sin 38°}{60}=0.5131$，

$\therefore B=31°$

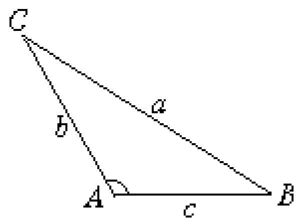
$\therefore C=180°-(A+B)$

$=180°-(38°+31°)=111°$

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{60\sin 111°}{\sin 38°}\approx 91$.

评述：同样是已知两边和一边对角，但可能出现不同的结果，应强调学生注意解题的灵活性.对于例 3，如果没有考虑到角 B 所受限制而求出角 B 的两个解，进而求出边 c 两解，也可利用三角形内两边之和大于第三边，两边之差小于第三边这一性质进而验证而达到排除不符题意的解.

［例 4］在△ABC 中，已知 $a=28$，$b=20$，$A=120°$，求 B(精确到 1°)和 c(保留两个有效数字).



分析：结合幻灯片§5.9.1 C，此例题属于 A 为钝角且 $a>b$ 的情形，有一解.也可应用正弦定理求解角 B 后，利用三角形内角和为 180°排除角 B 为钝角情形.

解：$\because \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{20\sin 120°}{28}=0.6187$

$\therefore B_1=38°$，$B_2=142°$ (舍)

$\therefore C=180°-(A+B)=22°$

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{20\sin 22°}{\sin 120°}\approx 8.7$

评述：(1)此题要求学生注意考虑问题的全面性.对于角 B 为钝角的排除也可以结合三角形小角对小边性质而得到.

(2)综合上述例题要求学生自我总结正弦定理的适用范围，已知两角一边或两边与其中一边的对角.

(3)对于已知两边夹角这一类型，将通过下一节所学习的余弦定理求解.

［师］为巩固本节我们所学内容，接下来进行课堂练习.

Ⅲ.课堂练习

1.在△ABC 中(结果保留两个有效数字).

(1)已知 $c=\sqrt{3}$，$A=45°$，$B=60°$，求 b；

(2)已知 $b=12$，$A=30°$，$B=120°$，求 a.

解：(1)$\because C=180°-(A+B)$

$=180°-(45°+60°)=75°$

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 60°}{\sin 75°}\approx 1.6$

(2)$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\therefore a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{12\sin 30°}{\sin 120°}\approx 6.9$

评述：此题为正弦定理的直接应用，意在使学生熟悉正弦定理的内容，可以让数学成绩较弱的学生进行板演，以增强其自信心.

2.根据下列条件解三角形(角度精确到 1°，边长精确到 1)：

(1)$b=11$，$a=20$，$B=30°$；

(2)$a=28$，$b=20$，$A=45°$；

(3)$c=54$，$b=39$，$C=115°$；

(4)$a=20$，$b=28$，$A=120°$.

解：(1)$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\therefore \sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{20\sin 30°}{11}=0.9091$

$\therefore A_1=65°$，$A_2=115°$

当 $A_1=65°$ 时，$C_1=180°-(B+A_1)$

$=180°-(30°+65°)=85°$

$\therefore c_1=\dfrac{b\sin C_1}{\sin B}=\dfrac{11\sin 85°}{\sin 30°}\approx 22.$

当 $A_2=115°$ 时，$C_2=180°-(B+A_2)$

$=180°-(30°+115°)=35°$

$\therefore c_2=\dfrac{b\sin C_2}{\sin B}=\dfrac{11\sin 35°}{\sin 30°}\approx 13.$

(2)$\because \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{20\sin 45°}{28}$

$=0.5051$

$\therefore B_1=30°$，$B_2=150°$

由于 $A+B_2=45°+150°>180°$，故 $B_2=150°$ 应舍去(或者由 $b<a$ 知 $B<A$，故 B 应为锐角)

$\therefore C=180°-(45°+30°)=105°$

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{28\sin 105°}{\sin 45°}\approx 38$

(3)$\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore \sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{39\cdot\sin 115°}{54}$

$\therefore B_1=41°$，$B_2=139°$

由于 $b<c$ 故 $B<C$　$\therefore B_2=139°$ 应舍去

∴B＝41°，A＝180°－(41°＋115°)＝24°

a＝$\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{39\sin 24°}{\sin 41°}$≈24.

(4)∵$\sin B$＝$\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 120°}{20}$

＝1.212＞1

∴本题无解

评述：此练习目的是使学生进一步熟悉正弦定理，同时加强解斜三角形的能力，既要考虑到已知角的正弦值求角的两种可能，又要结合题目的具体情况进行正确取舍.

Ⅳ.课时小结

［师］通过本节学习，我们一起研究了正弦定理的证明方法，同时了解了向量的工具性作用，并且明确了利用正弦定理所能解决的两类有关三角形问题：已知两角一边；已知两边和其中一边的对角.

Ⅴ.课后作业

(一)课本习题 5.9　1，2，3，4.

(二)1.预习内容

课本 P_{129}～P_{131}

2.余弦定理

2.预习提纲

(1)复习余弦定理证明中所涉及的有关向量知识.

(2)余弦定理如何与向量产生联系?

(3)利用余弦定理能解决哪些有关三角形问题.

●板书设计

§5.9.1　正弦定理、余弦定理(一)

1.正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

2.证明方法：

(1)平面几何法

(2)向量法

3.利用正弦定理，能够解决两类问题：

(1)已知两角和一边

(2)已知两边和其中一边的夹角

学习练习