●课题

§5.9.2　正弦定理、余弦定理(二)

●教学目标

(一)知识目标

余弦定理

(二)能力目标

1.了解向量知识应用；

2.掌握余弦定理推导过程；

3.会利用余弦定理证明简单三角形问题；

4.会利用余弦定理求解简单斜三角形边角问题；

5.能利用计算器进行运算.

(三)德育目标

通过三角函数、余弦定理、向量数量积等多处知识间联系来体现事物之间的普遍联系与辩证统一.

●教学重点

余弦定理证明及应用.

●教学难点

1.向量知识在证明余弦定理时的应用，与向量知识的联系过程；

2.余弦定理在解三角形时的应用思路.

●教学方法

1.启发学生在证明余弦定理时与向量数量积的知识产生联系，在应用向量知识的同时，注意使学生体会三角函数、正弦定理、向量数量积等多处知识之间的联系.

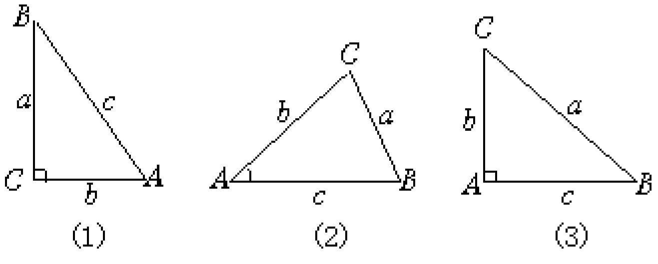
2.课题引入与§5.9.1中所提出的在三角形中已知两边夹角时，如何解三角形，随着问题的解决而引出本节研究的余弦定理，然后再通过向量知识给予证明，引起学生对向量知识的学习兴趣，同时感受向量法证明余弦定理的简便之处.

3.启发引导学生注意余弦定理的各种变形式，并总结余弦定理的适用题型的特点，在解题时正确选用余弦定理达到求解求证目的.

●教具准备

投影仪、幻灯片两张.

第一张：课题引入图片(记作§5.9.2 A)



如图(1)在Rt△ABC中，有 $a^2+b^2=c^2$

问题：在图(2)、(3)中，能否用 b、c、A，求解 a?

第二张：余弦定理(记作§5.9.2 B)

余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

形式一：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

形式二：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

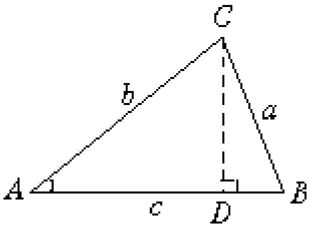
$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

●教学过程

Ⅰ.课题导入

［师］上一节，我们一起研究了正弦定理及其应用，在体会向量应用的同时，解决了在三角形已知两角一边和已知两边和其中一边对角这两类解三角形问题.当时对于已知两边夹角求第三边问题未能解决，下面我们来看幻灯片§5.9.2 A，如图(1)在直角三角形中，根据两直角边及直角可表示斜边，即勾股定理，那么对于任意三角形，能否根据已知两边及夹角来表示第三边呢?下面我们根据初中所学的平面几何的有关知识来研究这一问题.



在△ABC 中，设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，试根据 b，c，A 来表示 a.

分析：由于初中平面几何所接触的是解直角三角形问题，所以应添加辅助线构造直角三角形，在直角三角形内通过边角关系作进一步的转化工作，故作 CD 垂直于 AB 于 D，那么在 Rt△BDC 中，边 a 可利用勾股定理用 CD、DB 表示，而 CD 可在 Rt△ADC 中利用边角关系表示，DB 可利用 AB—AD 转化为 AD，进而在 Rt△ADC 内求解.

解：过 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D，则在 Rt△CDB 中，根据勾股定理可得：

$a^2=CD^2+BD^2$

∵在 Rt△ADC 中，$CD^2=b^2-AD^2$

又∵$BD^2=(c-AD)^2=c^2-2c\cdot AD+AD^2$

∴$a^2=b^2-AD^2+c^2-2c\cdot AD+AD^2$

$=b^2+c^2-2c\cdot AD$

又∵在 Rt△ADC 中，$AD=b\cdot\cos A$

∴$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

类似地可以证明 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

另外，当 A 为钝角时也可证得上述结论，当 A 为直角时 $a^2=b^2+c^2$ 也符合上述结论，这也正是我们这一节将要研究的余弦定理，下面我们给出余弦定理的具体内容.(给出幻灯片§5.9.2 B)

Ⅱ.讲授新课

1.余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余

弦的积的两倍.

在幻灯片§5.9.2 B 中我们可以看到它的两种表示形式：

形式一：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

形式二：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

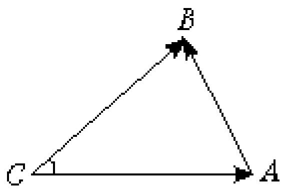
［师］在余弦定理中，令 $C=90°$，这时，$\cos C=0$，所以 $c^2=a^2+b^2$，由此可知余弦定理是勾股定理的推广.另外，对于余弦定理的证明，我们也可以仿照正弦定理的证明方法二采用向量法证明，以进一步体会向量知识的工具性作用.

2.向量法证明余弦定理

(1)证明思路分析

［师］由于余弦定理中涉及到的角是以余弦形式出现，那么可以与哪些向量知识产生联系呢?

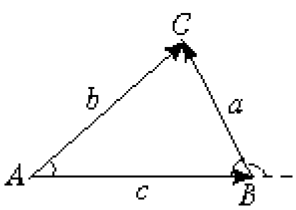
［生］向量数量积的定义式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的夹角.



［师］在这一点联系上与向量法证明正弦定理有相似之处，但又有所区别，首先因为无须进行正、余弦形式的转换，也就省去添加辅助向量的麻烦.当然，在各边所在向量的联系上依然通过向量加法的三角形法则，而在数量积的构造上则以两向量夹角为引导，比如证明形式中含有角 C，则构造$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$这一数量积以使出现 $\cos C$.同样在证明过程中应注意两向量夹角是以同起点为前提.

(2)向量法证明余弦定理过程：

如图，在△ABC 中，设 AB、BC、CA 的长分别是 c、a、b.



由向量加法的三角形法则可得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(180°-B)+|\overrightarrow{BC}|^2$

$=c^2-2ac\cos B+a^2$

即 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$

由向量减法的三角形法则可得：

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$

$=|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A+|\overrightarrow{AB}|^2$

$=b^2-2bc\cos A+c^2$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

由向量加法的三角形法则可得

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$

$=|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos C+|\overrightarrow{BC}|^2$

$=b^2-2ba\cos C+a^2$.

即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

评述：(1)上述证明过程中应注意正确运用向量加法(减法)的三角形法则.

(2)在证明过程中应强调学生注意的是两向量夹角的确定，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 属于同起点向量，则夹角为 A；$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是首尾相接，则夹角为角 B 的补角 $180°-B$；$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是同终点，则夹角仍是角 C.

［师］在证明了余弦定理之后，我们来进一步学习余弦定理的应用(给出幻灯片§5.9.2 B).

通过幻灯片中余弦定理的两种表示形式我们可以得到，利用余弦定理，我们可以解决以下两类有关三角形的问题：

(1)已知三边，求三个角.

这类问题由于三边确定，故三角也确定，解唯一，课本 P_{130} 例 4 属这类情况；

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.

这类问题第三边确定，因而其他两个角唯一，故解唯一，不会产生类似利用正弦定理解三角形所产生的判断取舍等问题.

接下来，我们通过例题评析来进一步体会与总结.

3.例题评析

［例 1］在△*ABC* 中，已知 a＝7，b＝10，c＝6，求 *A*、*B* 和 C.(精确到 1°)

分析：此题属于已知三角形三边求角的问题，可以利用余弦定理，意在使学生熟悉余弦定理的形式二.

解：∵$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{10^2+6^2-7^2}{2\times10\times6}=0.725$，

∴$A\approx44°$

∵$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7^2+10^2-6^2}{2\times7\times10}=\dfrac{113}{140}=0.8071$

∴$C\approx36°$

∴$B=180°-(A+C)\approx180°-(44°+36°)=100°$.

评述：(1)为保证求解结果符合三角形内角和定理，即三角形内角和为 180°，可用余弦定理求出两角，第三角用三角形内角和定理求出.

(2)对于较复杂运算，可以利用计算器运算.

［例 2］在△*ABC* 中，已知 a＝2.730，b＝3.696，C＝82°28′，解这个三角形(边长保留四个有效数字，角度精确到 1′).

分析：此题属于已知两边夹角解三角形的类型，可通过余弦定理形式一先求出第三边.在第三边求出后其余边角求解有两种思路：一是利用余弦定理的形式二根据三边求其余角，二是利用两边和一边对角结合正弦定理求解，但根据§5.9.1 斜三角形求解经验，若用正弦定理需对两种结果进行判断取舍，而在 0°～180°之间，余弦有唯一解，故用余弦定理较好.

解：由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2.730^2+3.696^2-2\times2.730\times3.696\times\cos82°28'$

得 c＝4.297.

∵$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{3.696^2+4.297^2-2.730^2}{2\times3.696\times4.297}=0.7767$

∴$A=39°2'$

∴$B=180°-(A+C)$

$=180°-(39°2'+82°28')=58°30'$.

评述：通过例 2，我们可以体会在解斜三角形时，如果正弦定理与余弦定理均可选用，那么求边两个定理均可，求角则余弦定理可免去判断取舍的麻烦.

［例 3］已知△*ABC* 中，a＝8，b＝7，B＝60°，求 c 及 $S_{\triangle ABC}$.

分析：根据已知条件可以先由正弦定理求出角 A，再结合三角形内角和定理求出角 C，再利用正弦定理求出边 c，而三角形面积由公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$ 可以求出.

若用余弦定理求 c，表面上缺少 C，但可利用余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 建立关于 c 的方程，亦能达到求 c 的目的.

下面给出两种解法.

解法一：由正弦定理得

$$\frac{8}{\sin A}=\frac{7}{\sin 60°}$$

$\therefore A_1=81.8°$，$A_2=98.2°$

$\therefore C_1=38.2°$，$C_2=21.8°$，

由 $\frac{7}{\sin 60°}=\frac{c}{\sin C}$，得 $c_1=3$，$c_2=5$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac_1\sin B=6\sqrt{3}$

或 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac_2\sin B=10\sqrt{3}$

解法二：由余弦定理得

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$\therefore 7^2=c^2+8^2-2\times8\times c\cos 60°$

整理得：$c^2-8c+15=0$

解之得：$c_1=3$，$c_2=5$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac_1\sin B=6\sqrt{3}$，

或 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac_2\sin B=10\sqrt{3}$.

评述：在解法一的思路里，应注意由正弦定理应有两种结果，避免遗漏；而解法二更有耐人寻味之处，体现出余弦定理作为公式而直接应用的另外用处，即可以用之建立方程，从而运用方程的观点去解决.故解法二应引起学生的注意.

综合上述例题，要求学生总结余弦定理在求解三角形时的适用范围：已知三边求任意角或已知两边夹角解三角形，同时注意余弦定理在求角时的优势以及利用余弦定理建立方程的解法.

［师］为巩固本节所学的余弦定理及其应用，我们来进行下面的课堂练习.

Ⅲ.课堂练习

1.在△ABC 中：

(1)已知 $b=8$，$c=3$，$A=60°$，求 a；

(2)已知 $a=20$，$b=29$，$c=21$，求 B；

(3)已知 $a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$B=150°$，求 b；

(4)已知 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，求 A.

解：(1)由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得

$a^2=8^2+3^2-2\times8\times3\cos 60°=49$，

$\therefore a=7$.

(2)由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 得

$\cos B=\dfrac{20^2+21^2-29^2}{2\times 20\times 21}=0$，

∴$B=90°$.

(3)由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得

$b^2=(3\sqrt{3})^2+2^2-2\times 3\sqrt{3}\times 2\cos 150°=49$，

∴$b=7$.

(4)由 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 得

$\cos A=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$A=45°$.

评述：此练习目的在于让学生熟悉余弦定理的基本形式，要求学生注意运算的准确性及解题效率.

2.根据下列条件解三角形(角度精确到 1°)

(1)$a=31$，$b=42$，$c=27$；

(2)$a=9$，$b=10$，$c=15$.

解：(1)由 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 得

$\cos A=\dfrac{42^2+27^2-31^2}{2\times 42\times 27}\approx 0.6691$

∴$A\approx 48°$

由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\approx 0.0523$

∴$B\approx 93°$

∴$C=180°-(A+B)=180°-(48°+93°)\approx 39°$

(2)由 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 得

$\cos A=\dfrac{10^2+15^2-9^2}{2\times 10\times 15}=0.8090$

∴$A\approx 36°$

由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 得

$\cos B=\dfrac{9^2+15^2-10^2}{2\times 9\times 15}=0.7660$

∴B≈40°

∴C＝180°－(A＋B)＝180°－(36°＋40°)≈104°

评述：此练习的目的除了让学生进一步熟悉余弦定理之外，还要求学生能够利用计算器进行较复杂的运算.同时，增强解斜三角形的能力.

Ⅳ.课时小结

［师］通过本节学习，我们一起研究了余弦定理的证明方法，同时又进一步了解了向量的工具性作用，并且明确了利用余弦定理所能解决的两类有关三角形问题：已知三边求任意角；已知两边一夹角解三角形.

Ⅴ.课后作业

(一)课本习题 5.9　6，7，8，9.

(二)1.预习内容

课本 5.9 正弦定理、余弦定理

2.预习提纲

(1)复习正、余弦定理内容

(2)总结正弦定理、余弦定理适用题型

●板书设计

§5.9.2　正弦定理、余弦定理(二)

1.余弦定理：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=b^2+a^2-2ba\cos C$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2.证明方法：

(1)平面几何法

(2)向量法

3.余弦定理所能解决的两类问题：

(1)已知三边求任意角；

(2)已知两边夹角解三角形

4.学生练习