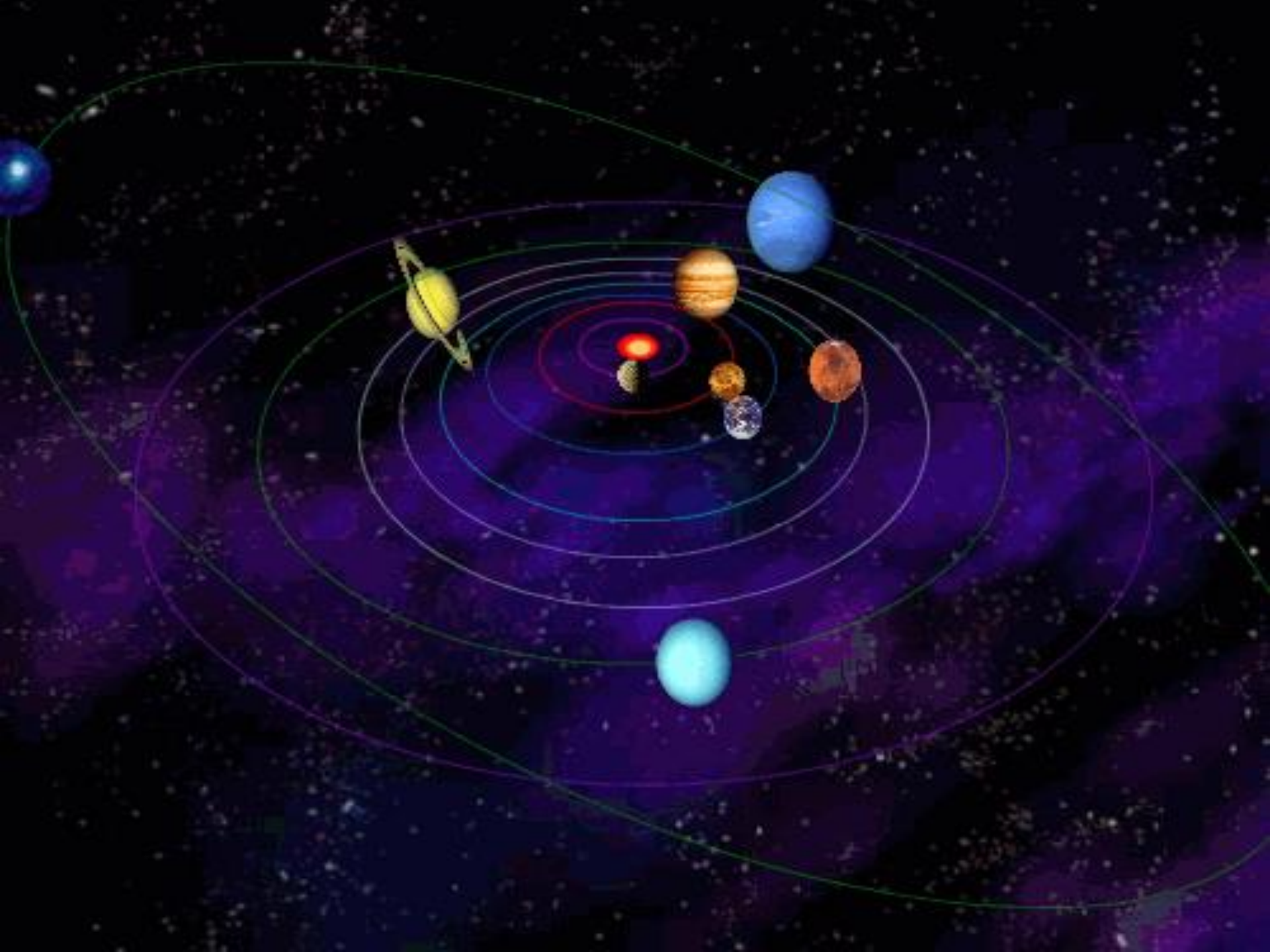
第二章　圆锥曲线与方程

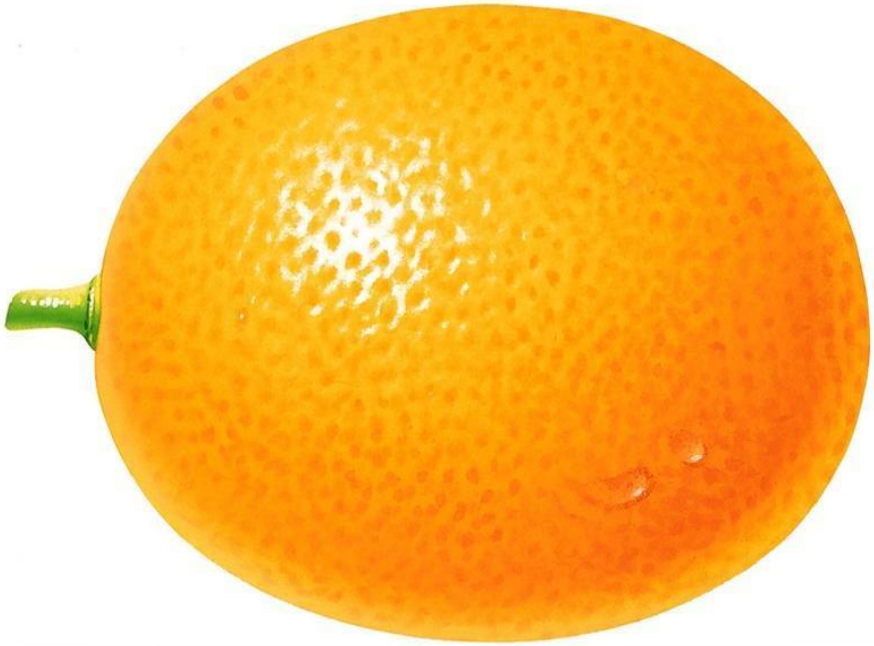
因此，通常把椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线。

椭圆及其标准方程

“哪里有数学，哪里就有美”。只要我们用心体会，它们就会呈现出来，给我们以美的享受，请欣赏




XINHUANET



现在我家装修房子，吊顶要设计成椭圆形，假如你是木工，请你帮我设计画出椭圆。

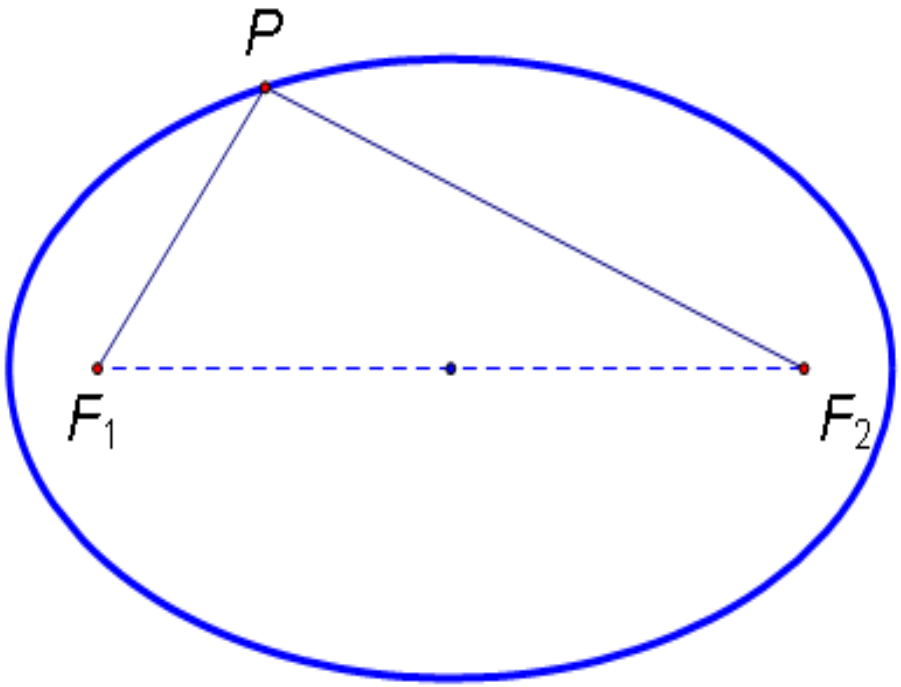
我们如何用自己的双手画出椭圆呢?

圆的定义：平面上到定点的距离等于定长的点的集合叫圆.

先回忆如何画圆

如何画椭圆

♦如何定义椭圆?



$|PF_1|$与$|PF_2|$的和是不是定值?

$|PF_1|+|PF_2|$与$|F_1F_2|$的大小关系?

1、椭圆的定义

椭圆定义的文字表述：

- 平面上到两个定点的距离的和（$2a$）等于定长（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫椭圆。
- 定点F_1、F_2叫做椭圆的焦点。
- 两焦点之间的距离叫做焦距（2c）。

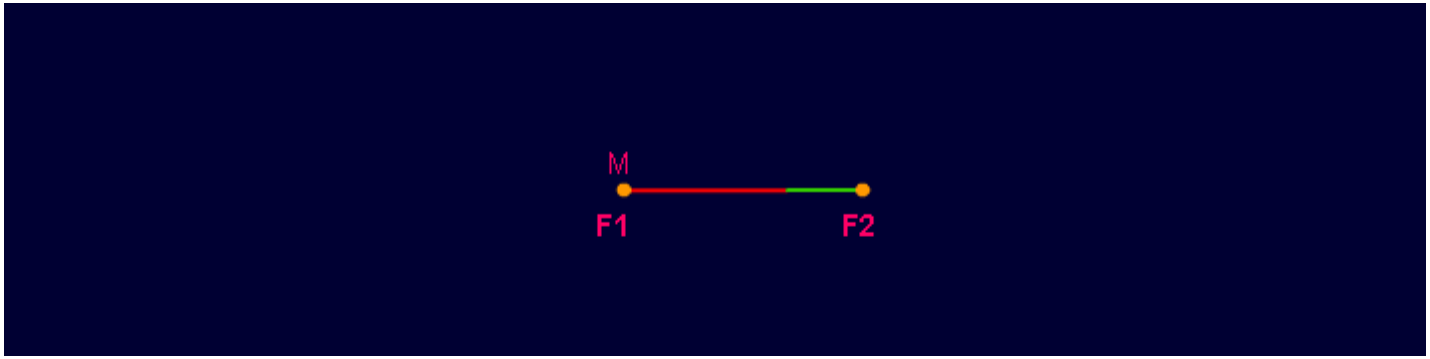
椭圆定义的符号表述：

$$|MF_1|+|MF_2|=2a>2c$$

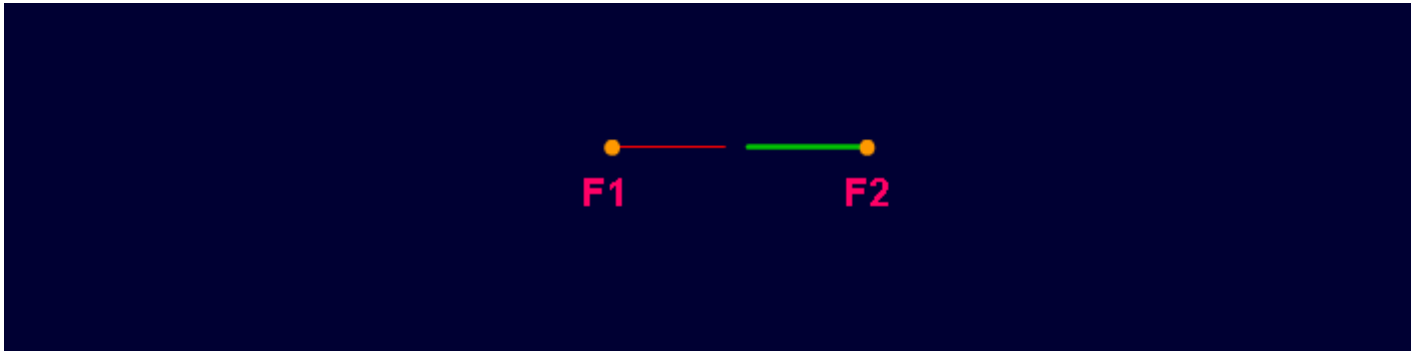
1. 改变两图钉之间的距离，使其与绳长相等，画出的图形还是椭圆吗？

2. 绳长能小于两图钉之间的距离吗？

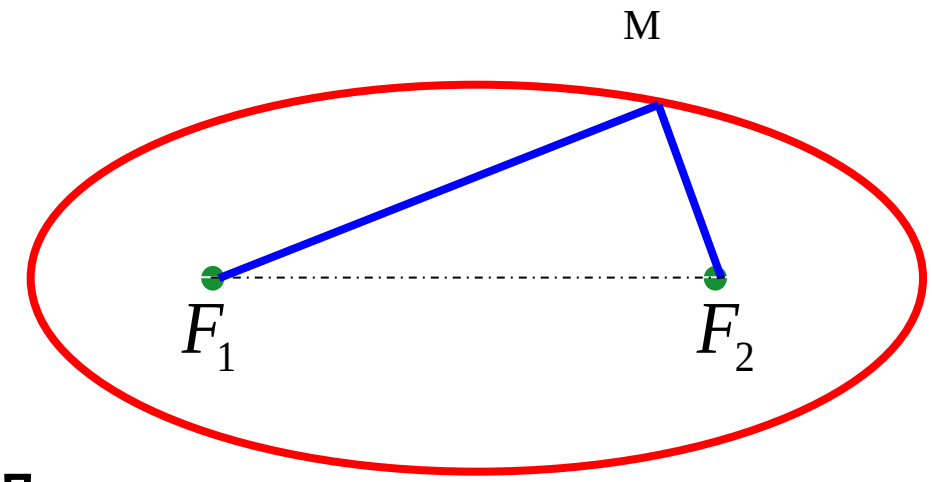
1. 改变两图钉之间的距离，使其与绳长相等，画出的图形还是椭圆吗？



2. 绳长能小于两图钉之间的距离吗？



椭圆的定义



几点说明：

1、**M是椭圆上任意一点，且$|MF_1| + |MF_2| =$ 常数；**

2、**通常这个常数记为2a，焦距记为2c，且2a>2c（？）；**

3、**如果2a = 2c，则M点的轨迹是线段F_1F_2.**

4、**如果2a < 2c，则M点的轨迹不存在.**（由三角形的性质知）

应用举例

例1.用定义判断下列动点M的轨迹是否为椭圆。

(1)到$F_1(-2,0)$、$F_2(2,0)$的距离之和为6的点的轨迹。

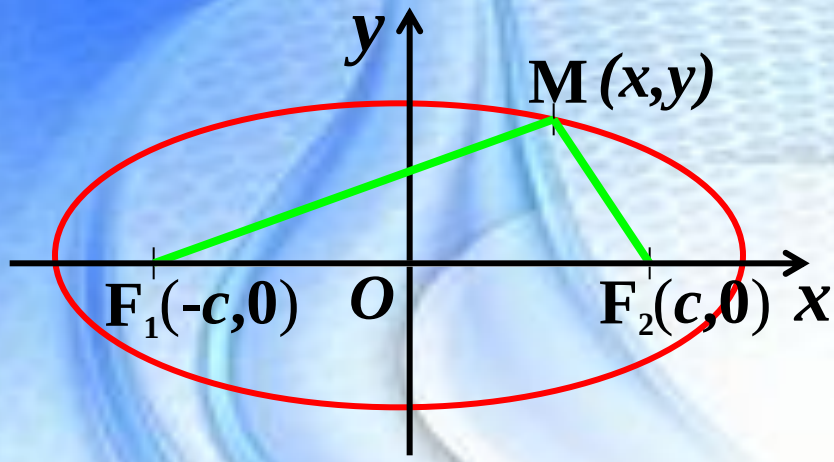
(2)到$F_1(0,-2)$、$F_2(0,2)$的距离之和为4的点的轨迹。

(3)到$F_1(-2,0)$、$F_2(2,0)$的距离之和为3的点的轨迹。

解 (1)因$|MF_1|+|MF_2|=6>|F_1F_2|=4$，故点M的轨迹为椭圆。

(2)因$|MF_1|+|MF_2|=4=|F_1F_2|=4$，故点M的轨迹不是椭圆(是线段$F_1F_2$)。

(3)因$|MF_1|+|MF_2|=4>|F_1F_2|=3$，故点M的轨迹不成图形。



如图所示:F_1、F_2为两定点，且$|F_1F_2|=2c$，求平面内到两定点F_1、F_2距离之和为定值$2a$($2a>2c$)的动点M的轨迹方程。

解：以F_1F_2所在直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴

建立直角坐标 F_2的坐标分别为$(-c,0)$、$(c,0)$。

问题: 求曲线方程的基本步骤?

（1）建系设点;

（2）写出条件;

（3）列出方程;

（4）化简方程;

（5）下结论。

意一点，

$MF_2|=2a\}$

如何化简?

$+y^2=2a$

$\therefore \sqrt{(x+c)} \quad = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

则$(x+c)^2$ [illegible] $(x-c)^2+y^2$

整理 [illegible]

两边 [illegible] $cx+a^2c^2+a^2y^2$

整理， [illegible]

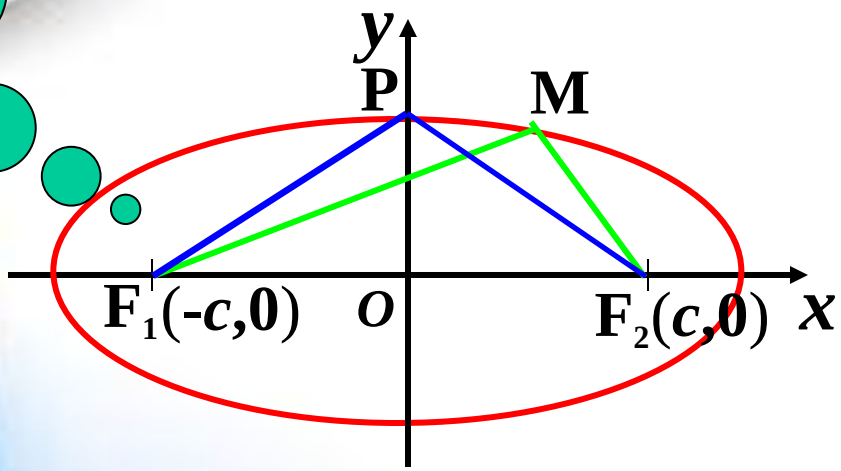
$\because 2a>2c>0$，即$a>c>0$，$\therefore a^2-c^2>0$，

两边同除以$a^2(a^2-c^2)$得:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

你能在图中找出表示a，c，$\sqrt{a^2-c^2}$，的线段吗？

怎样判断a,b,c大小关系？

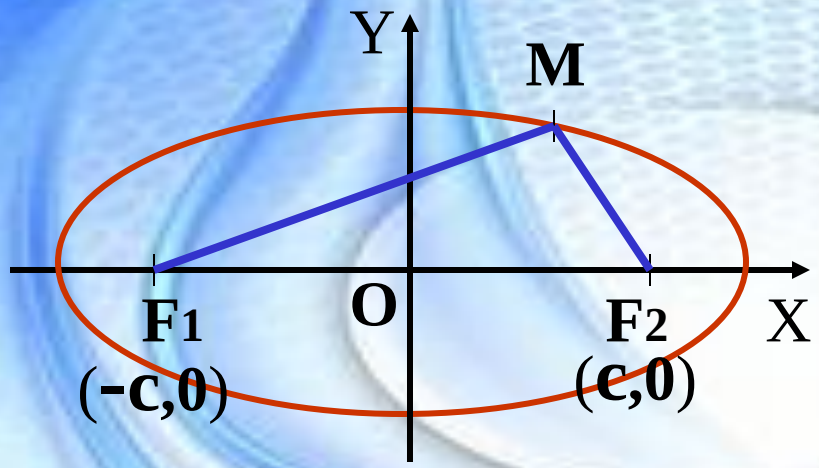


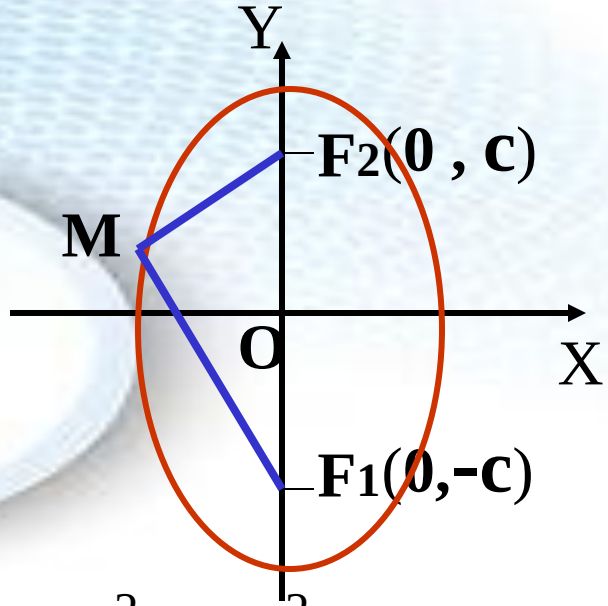
如图点P是椭圆与y轴正半轴的交点

可得$|PF_1|=|PF_2|=a,|OF_1|=|OF_2|=c,\ |PO|=\sqrt{a^2-c^2}$

令$b=|PO|=\sqrt{a^2-c^2}$

那么①式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$





$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

椭圆的标准方程的再认识：

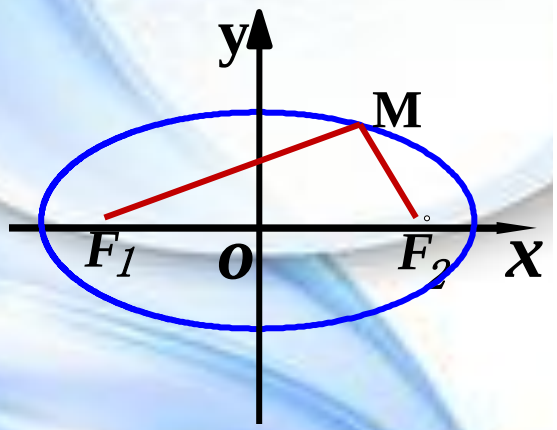
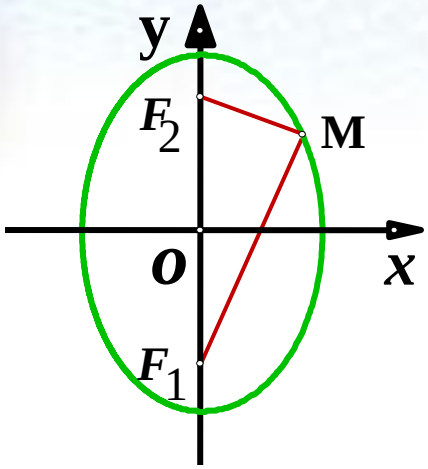
（1）椭圆标准方程的形式：左边是两个分式的平方和，右边是1

（2）椭圆的标准方程中三个参数a、b、c满足$a^2=b^2+c^2$。

（3）由椭圆的标准方程可以求出三个参数a、b、c的值。

（4）椭圆的标准方程中，x^2与y^2的分母哪一个大，则焦点在哪一条轴上。

椭圆的标准方程

定 义	$\lvert MF_1\rvert+\lvert MF_2\rvert=2a$	
图 形		
方 程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$
焦 点	F(±c，0)	F(0，±c)
a,b,c之间的关系	$c^2=a^2-b^2$	

应用举例

例2、求满足下列条件的椭圆的标准方程：

（1）满足a=4,b=1，焦点在X轴上的椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+y^2=1$

（2）满足a=4,c= $\sqrt{15}$，焦点在Y轴上的椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{16}+x^2=1$

练习

判定下列椭圆的焦点在 哪个轴上，
并指明a^2、b^2，写出焦点坐标。

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ 答：在 X 轴。（-3，0）和（3，0）

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$$ 答：在 y 轴。（0，-5）和（0，5）

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2+1}=1$$ 答：在y 轴。（0，-1）和（0，1）

判断椭圆标准方程的焦点在哪个轴上的准则：

焦点在分母大的那个轴上。

练习

1.方程$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{3}=1$表示焦点在x轴上的椭圆，则a的范围为(**a>3**)。

2.方程$\frac{x^2}{b}+\frac{y^2}{9}=1$表示焦点在y轴上的椭圆，则b的范围为(**0<b<9**)。

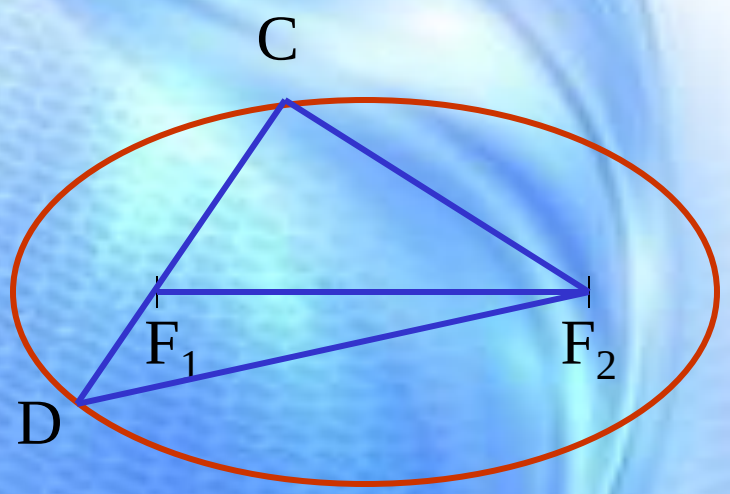
3.已知椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$,则两焦点坐标为__**$(\pm\sqrt{7},0)$**__。

备用例题

例题讲解

例1、填空：

(1)已知椭圆的方程为：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，则a=__5__，b=__4__，c=__3__，焦点坐标为：__(3,0)、(-3,0)__焦距等于__6__;若CD为过左焦点F_1的弦，则ΔF_2CD的周长为__20__



(2)已知椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$，则a=__$\sqrt{5}$__，b=__2__，c=__1__，焦点坐标为：__(0,-1)、(0,1)__焦距等于__2__;曲线上一点P到左焦点F_1的距离为3，则点P到另一个焦点F_2的距离等于__$2\sqrt{5}-3$__，则ΔF_1PF_2的周长为__$2\sqrt{5}+2$__

例3 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

（1）两个焦点的坐标分别是（－4，0）、（4，0），椭圆上的一点P到两焦点距离的和等于10；

变式：两个焦点的距离等于8，椭圆上的一点P到两焦点距离的和等于10.

（2）两个焦点的坐标分别是（0，－2）、（0，2），并且椭圆经过点 $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

变式：椭圆经过两点A $(-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$,B $(\sqrt{3},\sqrt{5})$

例4：若方程$4x^2+ky^2=1$表示的曲线是焦点在y轴上的椭圆，求k的取值范围。

解：由 $4x^2+ky^2=1$,可得

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{k}}=1$$

因为方程表示的曲线是焦点在y轴上的椭圆，所以

$$\frac{1}{k}>\frac{1}{4}$$ 即：$0<k<4$

所以k的取值范围为$0<k<4$。

例5：动点P到两定点$F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$的距离之和为8，则动点P的轨迹为----------（ B ）

A.椭圆

B.线段F_1F_2

C.直线F_1F_2

D.不能确定

三、小结：

1、椭圆的定义

2、两种标准方程的比较

3、在求椭圆方程时，要弄清焦点在哪个轴上，是x轴还是y轴？或者两个轴都有可能？

四、布置作业：

P_{96} 习题8.1：1、2、3

同步作业本P57


F1
F2