第三课时

课　　题

§　3.1.3　导数的概念(三)

教学目标

一、教学知识点

1.函数 $y=f(x)$的平均变化率，函数的导数的概念.

2.函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的求法.

3.函数 $y=f(x)$在开区间(a,b)内的导函数的定义.

4.函数 $y=f(x)$在某一点 $x=x_0$ 处可导，函数 $y=f(x)$在这点 $x=x_0$ 处连续.

二、能力训练要求

1.理解并掌握导数的概念，学会求函数在一点处的导数的方法.

2.理解并掌握开区间内的导数的概念，会求一个函数的导数.

3.深刻理解“函数在一点处可导，则函数在这点连续”的内在含义和实际意义.

4.能灵活运用导数的定义及导函数的定义求解导数.

三、德育渗透目标

1.培养学生的辩证唯物主义的观点，如量变与质变、分类与整合、运动与静止等等，都是进行唯物主义教育的素材.

2.根据函数的可导性与连续性的关系，培养学生的逻辑推理能力和思辩能力.

3.由切线的斜率与瞬时速度的关系，加深学生对特殊与一般、运动与静止的理解，培养学生的直觉思维中的类比能力.

4.培养学生的总结、归纳、抽象与概括的能力，培养学生的分析问题和解决问题的能力，培养学生实际动手操作的能力.

教学重点

导数的定义、导函数的概念是本节课的教学重点内容，它是研究函数的基本性质的基础，求导数的方法也是重点内容.

教学难点

导数概念的理解，通过曲线切线的斜率与瞬时速度引出导数的概念，从导数的定义归纳出求导数的方法.关于函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，与 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处连续的辨析是难点.

教学方法

建构主义理论指导下的课堂教学——在教师的正确引导下，由学生已学过的有关知识，如函数的极限、瞬时速度、曲线的切线斜率等概念，让学生积极主动地建构出函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数的概念，由函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数建构出函数 $y=f(x)$ 在开区间(a,b)上的导函数的定义.

教具准备

实物投影仪(或幻灯片、幻灯机).

教学过程

Ⅰ.课题导入

1.概念的引入

［师］同学们，前面我们已经学习了曲线在点 $P_0(x_0,y_0)$处的切线斜率及切线方程的求法.请同学们回忆一下，切线的斜率是怎样定义的?

［生 1］在 $P_0(x_0,y_0)$附近，设 Q 点是曲线上的点，其坐标为 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 P_0Q 的斜率 $k_{P_0Q}=\dfrac{(y_0+\Delta y)-y_0}{(x_0+\Delta x)-x_0}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限，就是曲线在点 P_0 处的切线的斜

率，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

［师］运用函数的极限研究了物体运动规律如瞬时速度、瞬时加速度等等.那么瞬时速度是如何定义的呢？

［生 2］如果物体的运动规律是 s=s(t)，那么物体在时刻 t 的瞬时速度 v，就是物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，当 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限，即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

［生 3］(突然站起)请问老师，物体的瞬时加速度是否可以用瞬时速度在 $\Delta t\to 0$ 时的平均加速度的极限来定义呢？

［师］生 3 提问得好.我们广大同学就应该有这种精神，敢于质疑，勇于探索和创新.他问的问题仍然是研究物体运动规律的变化性.物体的运动规律(瞬时速度)$v=v(t)$,那么物体在时刻 t 的瞬时加速度 a(t)，就是物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，当 $\Delta t\to 0$ 时平均加速度的极限，即 $a(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$.

(学生提出问题质疑老师，这一点在以往的常规教学中还是不常见到的，在新的形势下，教师应有为学生学习服务的意识，不单纯是讲授知识，而还应该传道解惑也.教师的工作方法、学识的渊博、热情的态度、人格的力量都能深深地影响学生的一辈子，可以让更多的学生有更好的发展，让所有的学生都有较好的发展，所以，我们课堂教学应鼓励学生大胆提问，找出问题)

［师］刚才两位同学所述都是正确的.切线的斜率和瞬时速度都是极限问题，这是共性问题，今天我们共同来学习新的内容(教师板书课题)：导数的概念(三).

Ⅱ.讲授新课

［师］我们知道，Δt 是时间增量，Δs 是位移增量，对于一般的函数 $y=f(x)$,Δx 称为自变量在 x_0 处的增量，Δy 称为函数的增量.切线的斜率与瞬时速度都是以极限来定义的，而且在形式上也是类似的.

［板书］

切线的斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，

瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

s=s(t)	$y=f(x)$
Δt 时间增量	Δx 自变量 x 在 x_0 处的增量
Δs 位移增量	Δy 函数在 x_0 处的增量(函数的增量)
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 平均速度	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 函数 $y=f(x)$在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率
$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 瞬时速度	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即为 $f(x)$在 x_0 处的切线斜率

我们把函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的函数的平均变化率的极限，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 叫做 $f(x)$在 x_0 处的导数.现请同学们概括并叙述导数的定义.

［生 4］函数 $y=f(x)$，如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，就说函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，并把这个极限叫做 $f(x)$在点 x_0 处的导数(或变化率)，记作 $f'(x_0)$或 $y'|_{x=x_0}$.

［师］如何用数学符号来表示呢？

［生 5］$f'(x_0)=y'|_{x=x_0}=k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

［师］大家认为这个定义中应注意到什么问题？请同学们先讨论一下，然后再总结.

(教室内的气氛开始活跃了，同学们争先恐后地发言，发表自己的见解.只有在宽松和谐的氛围中学习，才能实现有意义的建构)

［生 6］如果 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 要先有极限，才有 $f(x)$在点 x_0 处可导，进而才能得到 $f(x)$在点 x_0 处的导数.

［师］回答得很好！同学们能否从导数的定义，概括出求函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的方法和步骤？

［生 7］求函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的方法是：

(1)求函数 $y=f(x)$的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

(2)求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(3)取极限，得函数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

［师］同学们，刚才同学 7 总结得是否全面呢？

［生］(众生)总结得很全面.

［师］我们根据导数的定义和求导数的步骤，来研究上节课中求自由落体在 $t=3$ 时的瞬时速度，其中 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$.求它在 $t=3$ 时的瞬时速度实质就是求 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 在时刻 $t=3$ 处的导数.请同学们来说说看.

［生 8］第一步：先写出位移函数的增量 $\Delta s=\dfrac{1}{2}g(3+\Delta t)^2-\dfrac{1}{2}g\,3^2=\dfrac{1}{2}g\,[(\Delta t)^2+6\cdot\Delta t]$.

第二步：求出 t 由 3 到 $3+\Delta t$ 内的位移的平均变化率 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\frac{1}{2}g[(\Delta t)^2+6\cdot\Delta t]}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}g\cdot\Delta t+3g$.

第三步：对 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 取极限，即

$$v=s'|_{t=3}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(\frac{1}{2}g\cdot t+3g)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot g\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t+\lim_{\Delta t\to 0}3g$$

$$=\frac{1}{2}g\cdot 0+3g$$

$=3g=3\times9.8=29.4$(m/s).

故自由落体在 t=3 时的瞬时速度就是 v=29.4m/s.

［师］从这个题目中我们可以得出什么样的结论呢？

［生］瞬时速度就是位移函数 s(t)对时间 t 的导数，即 $v=s'|_{t}=t_0$.

［师］我们可以根据开区间上连续函数的定义，类似地定义函数在开区间上可导.

［生］如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任一点 x_0 处可导，即 $f'(x_0)=y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 在 x_0 处是存在的，由于 x_0 是开区间(a,b)上的任意一点，当 x_0 取遍(a,b)内的所有值时，这个极限都是存在的，就称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内可导.

［师］你的理解和解释是很好的.一般地，如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内可导，那么对于(a,b)内每一个确定的点 x_0，对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$，根据函数的定义，在(a,b)内构成一个新的函数，把这一新函数叫做 $f(x)$在开区间(a,b)内的导函数，前提是 $f(x)$在(a,b)内可导.它的数学符号如何表示呢？

［生 9］$f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，从这个定义中我们学到了由特殊到一般的科学思维方法，体现了动与静的辩证关系.

［师］当 $x_0\in$(a,b)时，函数 $y=f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$等于函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的导函数 $f'(x)$在点 x_0 处的函数值.$f'(x_0)$可以直接根据 $f(x)$在点 x_0 处的导数得到，也可以先求 $f(x)$在开区间(a,b)内的导数 $f'(x)$，然后再将 $x=x_0$ 代入 $f'(x)$中得到.

(稍停顿一会，让学生体会、反思)

［师］你们能举一个例子吗？

［生 10］刚才研究的自由落体运动在 t=3 时的瞬时速度就可以用导函数的方法来解.

$\because s=\dfrac{1}{2}gt^2$,$\therefore$任意时刻 t 的瞬时速度为

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g[2t\Delta t+(\Delta t)^2]}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g\cdot\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)$$

$$=\frac{1}{2}g\cdot(2t+\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t)$$

$$=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt$$

$\therefore$当 t=3 时，$v(3)=s'(3)=s'|_{t=3}$=g 3=9.8×3=29.4(m/s).

$v(t)$=g t 叫做 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的导函数.

［师］举的例子很恰当.我们从 $f(x)$在 x_0 处可导的定义可以知道，$f(x)$在 x_0 处有定义，那么我们来看一下 $f(x)$在 x_0 处是否有极限？是否连续呢？

［生 11］如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处可导，那么 $f(x)$在 x_0 处一定有极限，且连续.

［众生］这是需要证明的.如果能证明出来才能说明你的猜想是正确的.

［生 11］用定义法证明：

已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们要证的目标是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)=f(x_0)$.

令 $x=x_0+\Delta x$,当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x+f(x_0)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x]+\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0)$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0)$

$=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)=f(x_0)$.

∴$f(x)$在 x_0 处一定有极限，且连续.

［师］妙,妙极了！他不仅给出了猜想，而且证明了自己的猜想.这种先猜后证是众多科学家、发明家常用的方法.生 11 在证明过程中灵活运用代数式的变形，由 $f(x_0+\Delta x)$经过添项去项配凑出导数定义的基本结构形式.

［师］刚才的命题逆命题是否成立呢？

［生 12］如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续，那么函数 $y=f(x)$在 x_0 处可导.例如函数 $y=x^2$,$y=x^3$ 等等.

［师］你的举例能代表证明吗？

［生 13］他的结论是错误的.例如，函数 $y=f(x)=|x|$在 x_0 处连续，但在 $x=0$ 处不可导.

因为 $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\ge 0,\\ -x & x<0\end{cases}$ 在 x_0 处有

$\lim\limits_{x\to 0-} y=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0+} y=\lim\limits_{x\to 0+} x=0$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} y=0=f(0)$.

∴$y=|x|$在 $x=0$ 处连续.

但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

当 Δx＞0 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$;

当 Δx＜0 时，$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

∴ $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，即函数 $y=f(x)=|x|$在 $x=0$ 处不可导，也就是其导数不存在.这就说明：$f(x)$在 x_0 处连续，但未必可导.

［师］回答得完全正确，我们要学会辩证地看问题.你们能得到什么样的结论呢？

［生 14］如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，那么函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，反之未必成立.也就是说：函数具有连续性是函数具有可导性的必要条件，而不是充分条件.

2.课本例题

［例 1］求函数 $y=x^2$ 在点 $x=1$ 处的导数

［师］求函数在某一点处的导数的方法和步骤是什么呢？

［生 15］①求函数增量 Δy;②求函数的变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;③求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

［生 16］解：$\Delta y=(1+\Delta x)^2-1^2$

$=2\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}(2+\Delta x)=2+\lim_{x\to 0}\Delta x=2+0=2.$$

$\therefore y'|_{x=1}=2$.

(学生在黑板上板演，教师在下面巡视指导，与学生共同研究，发现问题及时解决)

［师］刚才我在下面发现有的同学求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 时漏掉了$(\Delta x)^2$,但他的结果仍然是 2.若把题目变为求 $y=x^2$ 的导数 y'，又如何求呢？

［生 17］$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}(2+\Delta x)=\lim_{x\to 0}(2x)+\lim_{x\to 0}(\Delta x)=2x$$

［例 2］已知 $y=\sqrt{x}$，求 y'.

［师］求一个函数在区间上的导数的方法是什么？

［生 18］与求函数在一点处的导数的方法和步骤是一样的，也是三个步骤，只是把 x_0 换成 x 即可.(然后该生走向黑板，边写边讲)

解：$y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

［师］回答得很好，求解也是完全正确的.从这道题可以看出求函数的导数也主要是求极限的值，所以极限是求函数的导数的基础，求极限的一些基本方法和思想要熟记于心.同时本题运用了分子有理化的变化技巧.若将本题变为求函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的导数 y',又如何求解呢？

［生 19］(自然而大方地走向讲台)求解 $y=\sqrt[3]{x}$ 的导数的思想方法和步骤与前面生 18 的完全相同，具体的是：

解：$\Delta y=\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})[(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{\Delta x}{(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{x+\Delta x})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\therefore y'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}.$$

［师］生 19 板演得非常正确，下面的同学在运算中存在不少的问题，例如对 $\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}$ 不知道如何处理，而生 19 给出分子有理化的方法，这一点我们在学习函数的极限时也讲过.所以我们应该积累一点代数的变形技巧才行.

3.精选例题

［例 1］已知 $y=x^3-2x+1$，求 $y',y'|_{x=2}$.(投影放出)

［生 20］解：$\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1-(x^3-2x+1)$

$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+1-x^3+2x-1$

$=(\Delta x)^3+3x\cdot(\Delta x)^2+(3x^2-2)\Delta x.$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+3x\cdot\Delta x+3x^2-2.$

$\therefore y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}$［$(\Delta x)^2+3x\cdot\Delta x+3x^2-2$］$=3x^2-2$.

又 $\Delta y=(2+\Delta x)^3-2(2+\Delta x)+1-(2^3-2\cdot2+1)=(\Delta x)^3+6(\Delta x)^2+10\Delta x$,

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+6\Delta x+10$.

$\therefore y'|_{x=2}= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}$［$(\Delta x)^2+6\Delta x+10$］$=10$.

所以 $y'=3x^2-2$，$y'|_{x=2}=10$.

［生 21］求 $y'|_{x=2}$ 时，可以直接运用 $y'=3x^2-2$，将 $x=2$ 代入即可.$y'|_{x=2}=3\times2^2-2=12-2=10$.

［师］很好!生 20 着重强调了定义在解题中的作用，而生 21 则灵活运用题目之间的内在联系，两个同学的做法都值得我们学习.如果题目中求 y'和 $y'|_{x=x0}$ 时，运用定义求 y'，然后利用 y'的表达式求 $y'|_{x=x0}$　就很简单了；如果只要求 $y'|_{x=x0}$，运用定义解就很简便了.

［例 2］已知 $f(x)=ax^3+3x^2+2$,若 $f'(-1)=4$，求 a 的值.(投影放出)

［师］这道题函数 $f(x)$中含有字母 a,已知 $f'(-1)=4$,那么先要把 $f'(-1)$用 a 表示出来，这样才能求出 a 的值.

［生 22］$\Delta y=a(-1+\Delta x)^3+3(-1+\Delta x)^2+2-$［$a(-1)^3+3(-1)^2+2$］$=a\cdot(\Delta x)^3+(3-3a)(\Delta x)^2+(3a-6)\Delta x$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a\cdot(\Delta x)^3+3(1-a)\cdot(\Delta x)^2+3(a-2)\cdot x}{\Delta x}$$

$=a\cdot(\Delta x)^2+(3-3a)\cdot\Delta x+3a-6$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}$［$a(\Delta x)^2+(3-3a)\Delta x+3a-6$］$=3a-6$.

$\therefore f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3a-6$.

又$\because f'(-1)=4$,

$\therefore 3a-6=4.\therefore a=\dfrac{10}{3}$.

故所求 a 的值为$\dfrac{10}{3}$.

［例 3］已知使函数 $y=x^3 \_ ax^2-\dfrac{4}{3}a$ 式 a 的导数为 0 的 x 值使 y 值也为 0，求常数 a 的值.(投影放出)

［师］本题是已知 $y'=0$，从中求出 x，此 x 对应的函数值是 0，从而求出实常数 a.问题是先求出导数 y',利用定义求解.

［生 23］解：$\Delta y=(x+\Delta x)^3+a(x+\Delta x)^2-\dfrac{4}{3}a-(x^3+ax^2-\dfrac{4}{3}a)$

$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+a x^2+2ax\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-\dfrac{4}{3}a-x^3-ax^2+\dfrac{4}{3}a$

$=(\Delta x)^3+(3x+1)\cdot(\Delta x)^2+(3x^2+2ax)\cdot\Delta x$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^3+(3x+1)\cdot(\Delta x)^2+(2x^2+2ax)\cdot\Delta x}{\Delta x}$$

$=(\Delta x)^2+(3x+1)\cdot(\Delta x)+(3x^2+2ax)$.

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ ［$(\Delta x)^2+(3x+1)\Delta x+(3x^2+2ax)$］

$=0+(3x+1)\times 0+3x^2+2ax=3x^2+2ax$.

∵$y'=0$，∴$3x^2+2ax=0$.

∴$x=0$ 或 $x=-\dfrac{2a}{3}$.

由题设,知当 $x=0$ 时，$y=0$，即

$0=0^3+a\cdot 0^2-\dfrac{4}{3}a$，

∴$a=0$;

当 $x=-\dfrac{2a}{3}$，$y=0$，即

$0=(-\dfrac{2a}{3})^3+a\cdot(-\dfrac{2a}{3})^2-\dfrac{4a}{3}=0$，

$\therefore -\dfrac{8a^3}{27}+\dfrac{4a^3}{9}-\dfrac{4a}{3}=0$.

$\therefore \dfrac{4a^3}{27}-\dfrac{4a}{3}=0$.

∴$a^3-9a=0$.∴$a=0,a=\pm 3$.

∴所求的实数 a 的值为 $0,\pm 3$.

［师］生 23 求解非常正确，解题思路也十分严密，请同学们注意，刚才我看到同学们解的大部分是不全面的，有的同学仅仅求出 $a=\pm 3$.原因是在 $y'=0$ 时，仅解出 $x=-\dfrac{2a}{3}$，遗漏了 $x=0$，而在将 $x=-\dfrac{2a}{3}$ 代入 y 的式子，解 $a^3-9a=0$ 时，又漏掉了 $a=0$.也有的同学漏掉 $x=-\dfrac{2a}{3}$，仅求出 $x=0$，再代入函数式，求出 $a=0$.而生 23 的解题思维的严谨性值得广大同学学习.

［例 4］(打出投影片)已知函数 $f(x)=x^2(x-1)$，当 $x=x_0$ 时，有 $f'(x_0)=f(x_0)$，求 x_0 的值.

［师生共析］该题也要先求 $f'(x_0)$，再根据 $f'(x_0)=f(x_0)$，列出关于 x_0 的一个方程，求出方程的解就是 x_0 的值.

［生 24］解：$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2(x_0+\Delta x-1)-x_0^2(x_0-1)=(\Delta x)^3+(3x_0-1)\cdot(\Delta x)^2+(3x_0^2-2x_0)\cdot\Delta x$.

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x)^2+(3x_0-1)\cdot\Delta x+3x_0^2-2x_0$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ ［$(\Delta x)^2+(3x_0-1)\cdot\Delta x+3x_0^2-2x_0$］$=3x_0^2-2x_0$.

∴$f'(x_0)=3x_0^2-2x_0$.

又∵$f'(x_0)=f(x_0)$,

∴$3x_0^2-2x_0=x_0^2(x_0-1)$,即 $x_0(x_0^2-4x_0+2)=0$.

∴$x_0=0,x_0^2-4x_0+2=0$.

∴$x_0=0, x_0=2\pm\sqrt{2}$.

∴x_0的值为 0 或$2+\sqrt{2}$或$2-\sqrt{2}$.

III.课堂练习

(学生板演，形式多样，如一生一题，两生一题即一道题由两位同学解，进行解题比赛等)

1.求 $y=2x^2+4x$ 在点 $x=3$ 处的导数.

［生 25］解：$\Delta y=2(3+\Delta x)^2+4(3+\Delta x)-(2\times3^2+4\times3)=2(\Delta x)^2+16\Delta x$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(\Delta x)^2+16\Delta x}{\Delta x}$$

$=2\cdot\Delta x+16$.

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2\cdot\Delta x+16)=16,$$即

$y'|_{x=3}=16$.

2.已知 $y=\sqrt{x+4}$，求 y'.

［生 26］解：$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x+4}-\sqrt{x+4}$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x+4}-\sqrt{x+4}}{\Delta x}$$

$$=\frac{x+\Delta x+4-x-4}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+4}+\sqrt{x+4})}$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x+4}+\sqrt{x+4})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+4}+\sqrt{x+4}}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\sqrt{x+\Delta x+4}+\sqrt{x+4})^{-1}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt{x+\Delta x+4}+\sqrt{x+4}}=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}.$$

$$\therefore y'=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}.$$

3.设 $f(x)$在 x_0 处可导,则$\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0-k)}{2k}$等于(　　)

A.　$2f'(x_0)$　　　B.$\dfrac{1}{2}f(x_0)$

C.　$f'(x_0)$　　　D.　0

［生 27］解：由导数定义知:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

所以 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0-k)}{2k}$

$=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-k)}{2k}$

$=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+k)-f(x_0)}{2k}+\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-k)}{2k}$

$=\dfrac{1}{2}f'(x_0)+\dfrac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)$

故选 C.

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$=A,则 $f'(x_0)$等于(　　)

A.　A　　　B.　$\dfrac{A}{3}$　　　C.　3A　　　D.　可能不存在

［生 28］解：选 D.例如，函数 $f(x)\begin{cases}0 & x\in Q,\\ 1 & x\notin Q,\end{cases}$,其中 Q 为有理数集，易见 $f(x)$处处不连续，故处处不可导，但对固定的 $x_0\in Q$，有 $\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=0$,这是由于无论 Δx 是有理数还是无理数，均有 $f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)=0$.

5.物体运动方程为 $s=\dfrac{1}{4}t^4-3$，则 t=5 时的瞬时速度为(　　)

A.　5　　　B.　25　　　C.　125　　　D.　625

［生 29］解：$\Delta s=\dfrac{1}{4}(t+\Delta t)^4-3-(\dfrac{1}{4}t^4-3)$

$=\dfrac{1}{4}$［$t^4+4t^3\cdot\Delta t+6t^2\cdot(\Delta t)^2+4t(\Delta t)^3+(\Delta t)^4$］$-3-\dfrac{1}{4}t^4+3$

$=\dfrac{1}{4}$［$(\Delta t)^4+4t\cdot(\Delta t)^3+6t^2\cdot(\Delta t)^2+4t^3\cdot\Delta t$］.

$\therefore\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{(\Delta t)^4+4t\cdot(\Delta t)^3+6t^2(\Delta t)^2+4t^3\Delta t}{4\cdot\Delta t}$

$=\dfrac{1}{4}$［$(\Delta t)^3+4t\cdot(\Delta t)^2+6t^2\cdot\Delta t+4t^3$］.

$\therefore s'=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{\Delta t\to 0}$［$(\Delta t)^3+4t\cdot(\Delta t)^2+6t^2\cdot\Delta t+4t^3$］

$=\dfrac{1}{4}(0+0+0+4t^3)=t^3$.

$\therefore s'|_{t=5}=5^3=125$.

$\therefore t$=5 时的瞬时速度为 125.故选 C.

6.设 $f(x)$为可导函数,且满足 $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则过曲线 $y=f(x)$上点$(1,f(1))$处的

切线斜率为(　　)

A.　2　　　B.　-1　　　C.　1　　　D.　-2

［生 30］解:∵ $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,

∴ $\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{f(1)-f(1-x)}{1-(1-x)}=-2$,

即 $f'(1)=-2$.故选　D　.

7.函数 $f(x)=x(x-1)\ldots(x-100)$在点 $x=0$ 处的导数为______________.

［生 31］解:当 $x=0$ 时,$f(0)=0\ (0-1)\cdot\ldots\cdot(0-100)=0$.

当 $x=0+\Delta x$ 时,$f(0+\Delta x)=\Delta x\cdot(\Delta x-1)\cdot\ldots\cdot(\Delta x-100)$,

∴$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x(\Delta x-1)\ldots(\Delta x-100)$.

∵ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(\Delta x-1)(\Delta x-2)\ldots(\Delta x-100)$,

∴ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(-1)^{100}\cdot1\cdot2\cdot\ldots\cdot100=100!$.

∴应填 100!.

Ⅳ.课时小结

［师］这节课我们共同研究了什么内容？请同学们进行小结.

［生 32］我们学习了导数的定义，以及求导数方法的三个步骤.

$$f'(x_0)=y'|x=x_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}..$$

$$f'(x)=y'|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

三个步骤：①求函数的增量 Δy；②求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；③取极限 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,以及函数的连续性是函数可导的必要而非充分条件.

［师］生 30 总结得很全面、很精辟，同学们应该学会概括和总结.

Ⅴ.课后作业

(一)课本 P_{114} 习题 3.1　4、5.

(二)1.预习内容：课本 $P_{112\sim114}$ 导数的几何意义.

2.预习提纲(打出投影片)：

(1)用导数表示切线的方程.

(2)预习例 3、例 4，学会通过求函数的导数来求函数在一点处的切线方程.

板书设计

§　3.1.3　导数的概念(三)

(一)有关概念

1.导数的定义.

2.求函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的方法.①求 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;②求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;③求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3.瞬时速度是位移函数 s(t)对时间 t 的导数.
4.如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都可导，则 $f(x)$在(a,b)内可导.
5.导函数 $f'(x)$或 y'的定义.
6.函数可导连续，反之不成立.
(二)例题
A. 课本例题
1.求 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数.
2.求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数 y'.

变题:求 $y=\sqrt[3]{x}$ 的导数 y'.

B. 精选例题
例 1.已知 $y=x^3-2x+1$,求 y', $y'|_{x=2}$.
例 2.已知 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$,求 a 的值.
例 3.已知使函数 $y=x^3+ax^2-\frac{4}{3}a$ 的导数为 0 的 x 值使 y 值也为 0，求 a 的值.
例 4.已知函数 $f(x)=x^2(x-1)$，当 $x=x_0$ 时有 $f'(x_0)=f(x_0)$，求 x_0 的值.
(三)课堂练习
1.求函数 $y=2x^2+4x$ 在点 $x=3$ 处的导数.
2.求函数 $y=\sqrt{x+4}$ 的导数 y'.

3.设 $f(x)$在 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{k\to0}\frac{f(x_0+k)-f(x_0-k)}{2k}$ 等于 ( )

A. $2f'(x_0)$ B. $\frac{1}{2}f'(x_0)$

C. $f'(x_0)$ D. 0

4. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$=A,则 $f'(x_0)$等于( )

A. A B. $\frac{A}{3}$

C. 3A D. 可能不存在

5. $s=\frac{1}{4}t^4-3$ 则 $t=5$ 时的瞬时速度为 ( )

A. 5 B. 25 C. 125 D. 625

6.设 $f(x)$为可导函数,且满足 $\lim\limits_{x\to0}=\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则过曲线 $y=f(x)$上点$(1,f(1))$处的切线斜率为( )

A. 2 B. -1 C. 1 D. -2

7.函数 $f(x)=x(x-1)\ldots(x-100)$在点 $x=0$ 处的导数为.
(四)课时小结
(五)课后作业