

第三章 数 列

●课 题

§ 3.1.1 数 列 (一)

●教学目标

(一) 教学知识点

1. 数列的概念.
2. 数列的表示.
3. 数列的分类.
4. 数列的通项公式.

(二) 能力训练要求

1. 理解数列的概念、表示、分类、通项等基本概念.
2. 了解数列和函数之间的关系.
3. 了解数列的通项公式, 并会用通项公式写出数列的任意一项.
4. 对于比较简单的数列, 会根据其前几项写出它的一个通项公式.

(三) 德育渗透目标

1. 培养学生认真观察的习惯.
2. 培养学生从特殊到一般的归纳能力.
3. 提高观察、抽象的能力.

●教学重点

1. 理解数列概念;
2. 用通项公式写出数列的任意一项.

●教学难点

根据一些数列的前几项抽象、归纳出数列的通项公式.

●教学方法

发现式教学法

结合一些具体的例子, 引导学生认真观察各数列特点, 逐步发现其规律, 进而抽象、归纳出其通项公式.

●教具准备

幻灯片两张:

第一张: 一组数列 (记作 § 3.1.1 A)

第二张: 一组数列 (记作 § 3.1.1 B)

●教学过程

I. 复习回顾

[师] 在前面第二章中我们一起学习了有关映射与函数的知识, 现在我们来回顾一下函数的定义.

[生] 齐声回答函数定义.

[师] (板书) 函数定义

如果 A 、 B 都是非空的数集, 那么 A 到 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ 就叫做 A 到 B 的函数, 记作: $y=f(x)$, 其中 $x \in A$, $y \in B$.

II. 讲授新课

[师] 在学习第二章函数知识的基础上, 今天我们一起来学习第三章数列有关知识, 首先我们来看一些例子. (打出幻灯片 § 3.1.1 A)

1, 2, 3, 4, ..., 50

①

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{63} \quad \textcircled{2}$$

$$15, 5, 16, 16, 28 \quad \textcircled{3}$$

$$0, 10, 20, 30, \dots, 1000 \quad \textcircled{4}$$

$$1, 0.84, 0.84^2, 0.84^3, \dots \quad \textcircled{5}$$

[师] 请同学们观察上述例子, 看它们有何共同特点?

[生] 认真观察上述例子, 经过思考归纳、总结它们的共同特点:

[生甲] 它们均是一列数.

[生乙] 它们是有一定次序的.

[师] 引出数列及有关定义.

1. 定义

(1) 数列: 按照一定次序排成的一列数.

[师] 看来上述例子就为我们所学数列. 那么一些数为何将其按照一定的次序排列, 它有何实际意义呢? 也就是说和我们生活有何关系呢?

[生] 太多了...

[师] 请同学们举例说明.

[生甲] 如数列①, 它就是我们班学生的学号由小到大排成的一列数.

[生乙] 数列②, 是引言问题中各个格子里的麦粒数按放置的先后排成的一列数.

[生丙] 数列③, 好像是我国体育健儿在五次奥运会中所获金牌数排成的一列数.

[生戊]: 数列④, 可看作是在 1 km 长的路段上, 从起点开始, 每隔 10 m 种植一棵树, 由近及远各棵树与起点的距离排成的一列数.

[生乙] 数列⑤, 我们在化学课上学过一种放射性物质, 它不断地变化为其他物质, 每经过 1 年, 它就只剩留原来的 84%, 若设这种物质最初的质量为 1, 则这种物质各年开始时的剩留量排成一列数, 则为: $1, 0.84, 0.84^2, 0.84^3, \dots$.

[师] 诸如此类, 还有很多, 举不胜举, 我们学习它, 掌握它, 也是为了使我们的生活更美好, 下面我们进一步讨论, 好吗?

现在, 就上述例子, 我们来看一下数列的基本知识.

比如, 数列中的每一个数, 我们以后把其称为数列的项, 各项依次叫做数列的第 1 项 (或首项), 第 2 项, \dots , 第 n 项, \dots .

那么, 数列一般可表示为...

[生] $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. 其中数列的第 n 项用 a_n 来表示.

[师] 数列还可简记作 $\{a_n\}$.

[师] 数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 有一定的关系吗?

[生 A] 有, 如数列①中, 每一项的序号与这一项有这样的对应关系:

序号	1	2	3	\dots	50
	↓	↓	↓	\dots	↓
项	1	2	3	\dots	50

即数列的每一项就等于其相对应的序号. 也可以用一式子: $a_n = n (1 \leq n \leq 50)$ 来表示. 且 $n \in \mathbf{N}^*$

[生 B] 数列②中, 每一项的序号与这一项的对应关系为:

序号	1	2	3	\dots	64
	↓	↓	↓	\dots	↓
项	1	2	2^2	\dots	2^{63}
	↓	↓	↓	\dots	↓
	2^0	2^1	2^2	\dots	2^{63}

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ & 2^{1-1} & & 2^{2-1} & & 2^{3-1} & & \dots & & 2^{64-1} \end{array}$$

即: $a_n=2^{n-1}$ (n 为正整数, 且 $1 \leq n \leq 64$)

[生 C] 数列④中:

序号	1	2	3	...	101
	↓	↓	↓	...	↓
项	0	10	20	...	1000
	↓	↓	↓	...	↓
	10×0	10×1	10×2	...	10×100
	↓	↓	↓	...	↓
	$10 \times (1-1)$	$10 \times (2-1)$	$10 \times (3-1)$...	$10 \times (101-1)$

$\therefore a_n=10(n-1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $1 \leq n \leq 101$).

[生 D] 数列⑤中:

序号	1	2	3	4	...
	↓	↓	↓	↓	...
项	1	0.84	0.84^2	0.84^3	...
	↓	↓	↓	↓	...
	0.84^0	0.84^1	0.84^2	0.84^3	...

$\therefore a_n=0.84^{n-1}$ ($n \geq 1$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$)

[师] 数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系都可以用这样的式子来表示吗?

[生] 不是, 如数列③的项与序号的关系就不可用这样的式子来表示.

[师] 综上所述, 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.

即: 只要依次用 1, 2, 3, ... 代替公式中的 n , 就可以求出该数列相应的各项.

[师] 下面, 我们来练习找通项公式.

(打出幻灯片 § 3.1.1 B)

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	①
$1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$	②
$-1, 1, -1, 1, \dots$	③
$2, 2, 2, 2, 2.$	④
$1, 3, 5, 7, 9, \dots$	⑤

[生] 思考, 讨论.....

得出数列①的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

数列②可用通项公式: $a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 1$) 来表示.

数列③的通项公式为 $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

或 $a_n = \begin{cases} -1 & (n \text{ 为奇数}) \\ 1 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$

数列④的通项公式为: $a_n = 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $1 \leq n \leq 6$)

数列⑤的通项公式为: $a_n = 2n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

[师] 请同学们思考数列与数集的区别和联系.

[生 A]在数列的定义中, 要强调数列中的数是按一定次序排列的, 而数集中的元素没有次序.

[师] 能举例说明吗?

[生 A]例如, 数列 4, 5, 6, 7, 8, 9 与数列 9, 8, 7, 6, 5, 4 是不同的两个数列.

即如果组成两个数列的数相同而排列次序不同, 那么它们就是不同的数列. 而数集中的元素若相同, 则为同一集合, 与元素的次序无关.

[生 B]数列中的数是可以重复出现的, 而数集中的数是不允许重复出现的. 如上数列③与④, 均有重复出现的数.

[师] 另外……

[生 C]数列与数的集合都是具有某种共同属性的数的全体.

[师] $\{a_n\}$ 与 a_n 又有何区别和联系?

[生 D] $\{a_n\}$ 表示数列; a_n 表示数列的项.

具体地说, $\{a_n\}$ 表示数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$.

而 a_n 只表示这个数列的第 n 项, 其中 n 表示项的位置序号.

如: a_1, a_2, a_3, a_n 分别表示数列的第 1 项, 第 2 项, 第 3 项及第 n 项.

[师] 请同学们思考数列是否都有通项公式? 数列的通项公式是否是惟一的?

[生甲]: 数列都有通项公式, 数列的通项公式也是惟一确定的.

[生乙]: 数列都有通项公式, 数列的通项公式不是惟一确定的.

[生丙]: 不是所有的数列都有通项公式, 数列的通项公式也不是惟一确定的.

[师] 这几位同学的答案各不一致, 究竟哪位同学的回答是正确的呢?

下面请看上述数列④, 数列⑤.

对于数列④, 可否用一个公式来表示项与项数的关系呢?

可发现, 这一数列不可用一个公式来表示每一项与它的项数的关系, 即这个数列没有通项公式.

看来, 不是所有的数列都有通项公式.

对于数列③, 这一数列的项与项数的对应关系不仅可用公式: $a_n = (-1)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 来表示,

还可用公式: $a_n = \begin{cases} -1, n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^* \\ 1, n = 2k, k \in \mathbf{N}^* \end{cases}$, 来表示. 这两个通项公式形式上虽然不同, 但表示

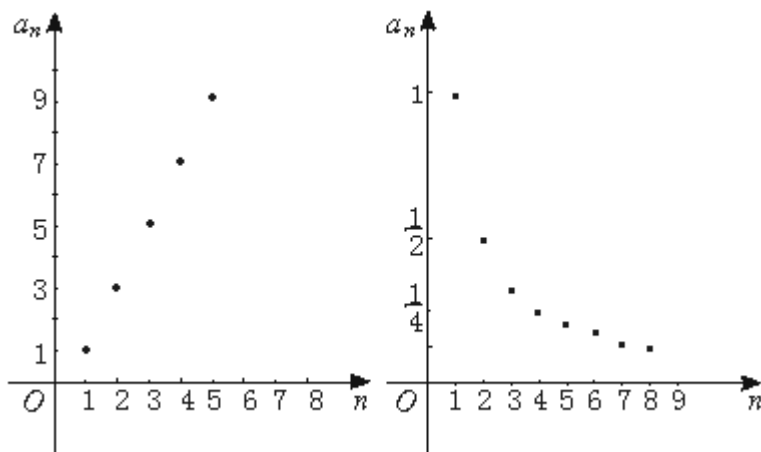
同一个数列. 看来, 一些数列的通项公式可以有不同的形式, 即数列的通项公式不是惟一确定的.

但要注意: 数列的通项公式确定时, 数列也就确定了. (因为如果已知一个数列的通项公式, 只要用序号代替公式中的 n , 就可以求出数列的各项)

[师] 从映射、函数的观点来看, 数列也可看作是一个定义域为正整数集 \mathbf{N}^* (或它们的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$) 的函数, 当自变量从小到大依次取值时对应的一系列函数值, 数列的通项公式就是相应函数的解析式.

[师] 对于函数, 我们可以根据其函数解析式画出其对应图象. 看来, 数列也可以根据其通项公式画出其对应图象, 下面请同学们练习画数列①、②的图象.

[生] 根据所求通项公式画出数列⑤①的图象, 并总结其特点:



特点：它们都是一群孤立的点.

(5) 有穷数列：项数有限的数列.如数列④只有 6 项，是有穷数列.

(6) 无穷数列：项数无限的数列.如数列①②③⑤都是无穷数列.

2.例题讲解

[例 1] 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

(2) $a_n = (-1)^n \cdot n$

分析：由通项公式定义可知，只要将通项公式中 n 依次取 1, 2, 3, 4, 5，即可得到数列的前 5 项.

解：(1) 在 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 中依次取 $n=1,2,3,4,5$ ，得到数列 $\{\frac{n}{n+1}\}$ 的前 5 项分别为

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$.

即 $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{3}{4}; a_4 = \frac{4}{5}; a_5 = \frac{5}{6}$.

(2) 在 $a_n = (-1)^n \cdot n$ 中依次取 $n=1,2,3,4,5$ ，得到数列 $\{(-1)^n \cdot n\}$ 的前 5 项分别为：-1, 2, -3, 4, -5.

即 $a_1 = -1; a_2 = 2; a_3 = -3; a_4 = 4; a_5 = -5$.

[例 2] 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 1, 3, 5, 7;

(2) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, -\frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}$.

分析：认真观察各数列所给出项，寻求各项与其项数的关系，归纳其规律，抽象出其通项公式.

解：(1)

序号：	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
项：	1=2×1-1	3=2×2-1	5=2×3-1	7=2×4-1

规律：这个数列的前 4 项 1, 3, 5, 7 都是序号的 2 倍减去 1，所以它的一个通项公式

是 $a_n=2n-1$;

(2)

序号:	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
项分母:	$2=1+1$	$3=2+1$	$4=3+1$	$5=4+1$
	↓	↓	↓	↓
项分子:	2^2-1	3^2-1	4^2-1	5^2-1

规律: 这个数列的前 4 项 $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$ 的分母都是序号加上 1, 分子都

是分母的平方减去 1, 所以它的一个通项公式是: $a_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1}$;

(3)

序号:	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
项:	$-\frac{1}{1 \times 2}$	$\frac{1}{2 \times 3}$	$-\frac{1}{3 \times 4}$	$\frac{1}{4 \times 5}$
	$\frac{1}{1 \times (1+1)}$	$\frac{1}{2 \times (2+1)}$	$\frac{1}{3 \times (3+1)}$	$\frac{1}{4 \times (4+1)}$
	$(-1)^1$	$(-1)^2$	$(-1)^3$	$(-1)^4$

规律: 这个数列的前 4 项 $-\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, -\frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}$ 的绝对值都等于序号与序号加 1

的积的倒数, 且奇数项为负, 偶数项为正, 所以它的一个通项公式是: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)}$.

III. 课堂练习

[生] 思考课本 P₁₁₀ 练习 1, 2, 3, 4

(老师提问, 学生作答)

1. (1) $a_n = n^2$

$a_1=1; a_2=4; a_3=9; a_4=16; a_5=25.$

(2) $a_n = 10n$

$a_1=10; a_2=20; a_3=30; a_4=40; a_5=50.$

(3) $a_n = 5 \times (-1)^{n+1}$

$a_1=5; a_2=-5; a_3=5; a_4=-5; a_5=5.$

(4) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$

$a_1 = \frac{3}{2}; a_2 = \frac{5}{5}; a_3 = \frac{7}{10}; a_4 = \frac{9}{17}; a_5 = \frac{11}{26}.$

2. (1) $a_n = \frac{1}{n^3}, a_7 = \frac{1}{343}; a_{10} = \frac{1}{1000}.$

(2) $a_n = n(n+2), a_7=63; a_{10}=120.$

$$(3) a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, a_7 = \frac{1}{7}; a_{10} = -\frac{1}{10}.$$

$$(4) a_n = -2^n + 3, a_7 = -125; a_{10} = -1021.$$

$$3.(1) 2, 4, (8), 16, 32, (64), 128; a_n = 2^n$$

$$(2) (1), 4, 9, 16, 25, (36), 49; a_n = n^2$$

$$(3) -1, \frac{1}{2}, (-\frac{1}{3}), \frac{1}{4}, (-\frac{1}{5}), \frac{1}{6}, (-\frac{1}{7}); a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$(4) 1, \sqrt{2}, (\sqrt{3}), 2, \sqrt{5}, (\sqrt{6}), \sqrt{7};$$

$$a_n = \sqrt{n}.$$

评析：此题目应认真练习，仔细琢磨，从而提高抽象、归纳能力。

IV. 课时小结

对于本节内容应着重掌握数列及有关定义，会根据通项公式求其任意一项，并会根据数列的一些项求一些简单数列的通项公式。

V. 课后作业

(一) 课本 P₁₁₂ 习题 3.1 1, 2

(二) 1. 预习内容：课本 P₁₁₀ ~ P₁₁₁.

2. 预习提纲：

(1) 什么叫数列的递推公式？

(2) 递推公式与通项公式有什么异同点？

● 板书设计

§ 3.1.1 数列 (一)

一、定义

1. 数列

2. 项

3. 一般形式

4. 通项公式

5. 有穷数列

6. 无穷数列

二、例题讲解

例 1

例 2

复习回顾

课时小结